Теоретические вопросы и упражнения.

(1) Как делается переход к параметру в криволинейных интегралах I и II рода?
(2) Чем отличаются формулировки условий независимости интеграла от пути интегрирования в двумерном и трехмерном случаях?
(3) Как выбирается знак в двойном интеграле по проекции участка поверхности при вычислении поверхностного интеграла II рода?
(4) Что общего и отличного друг от друга в понятиях поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей?
(5) Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости последовательностей и рядов.
(6) Может ли последовательность функций, разрывных на отрезке $[a, b]$, сходиться на нем равномерно к непрерывной функции? Рассмотрите на [0,1] $f_n(x) = x^2 + \frac{D(x)}{n}$, где $D(x)$ – функция Дирихле: D равна 1 для x рациональных и равна 0 для x иррациональных.
(7) Может ли последовательность функций, непрерывных на отрезке [a,b], равномерно сходиться на нем к функции разрывной?
(8) Пусть даны три ряда: $(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)$; $(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)$; $(3) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\alpha_n(x) + \beta_n(x)\Big)$. Какие из нижеследующих утверждений справедливы?
   (a) Если (1) и (2) сходятся равномерно, то (3) сходится равномерно.
   (b) Если (1) и (2) сходятся неравномерно, то (3) сходится неравномерно.
   (c) Если (1) сходится равномерно, а (2)- неравномерно, то (3)- неравномерно.
   (d) Если (1) сходится равномерно, а (2) - неравномерно, то (3) - равномерно.
(9) Какой вид имеют множества сходимости и равномерной сходимости степенного ряда?
(10) В каких случаях функциональные ряды допускают почленное интегрирование и дифференцирование?
(11) Может ли интеграл от неограниченной функции сходиться равномерно? абсолютно ?
(12) Возможна ли ситуация, когда $f(x) \sim g(x)$, $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ сходится, а $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ расходится?

(13) Дайте определение равномерной сходимости собственного и несобственного интеграла по параметру.

(14) Что такое тригонометрический ряд Фурье; как находятся его коэффициенты?

(15) Какие функции можно разложить в тригонометрический ряд Фурье? Как сумма ряда связана с разлагаемой функцией?

Вариант 0 (с решением).

0.1 Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=ax$, заключенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

0.2 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\breve{BSA}} x^2y dx - xy^2 dy$ по незамкнутой дуге BSA (рис. 4,варианты 2,8,14) непосредственно и с использованием формулы Грина (BSA – часть границы квадрата).

0.3 Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2\,dydz + z\,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2, \quad y\geq 0, z\geq 0$.

0.4 Для функциональной последовательности $f_n(x)=\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+nx^2}\right)$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

0.5 Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x)=\dfrac{n+1}{n+x^2}$ на каждом из множеств: $E_1=[-1,1], \quad E_2=(-\infty,\infty), \quad E_3=\{0,1/4,1/2,1\}$.

0.6 Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$ на множестве E=$(-\infty,\infty)$.

0.7 Найти область существования функции $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-x^2n}$ и исследовать ее на непрерывность.

0.8 Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

0.9 Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{n\sqrt{n}}$ допускает почленное интегрирование на $[1/2,2]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

0.10 Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$ в степенной ряд с центром в $x_0=0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

0.11 Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^{\sin y} (x+y)e^x \, dx$.

0.12 Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}} dx$.

0.13 Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} pe^{-px} \, dx$ на множествах $a) E_1 = (p_0, p_1)$ $(0 < p_0 < p_1)$ $\quad b) E_2 = (0, p_1)$, где $(0 < p_1)$.
0.14 Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-1, 1)$, равном периоду, формулой $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$.
Начертить график суммы ряда.
0.15 Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x + \cos x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.
Решение.
0.1 - У поверхности имеется две плоскости симметрии. Достаточно вычислить площадь части поверхности, находящейся в первом октанте $(x, y, z \geq 0)$ и затем учетверить резудьтат. Геометрическая иллюстрация представлена на рис 1 .

Рис. 1

На плоскость $z = 0$ поверхность проецируется в полуокружность L радиуса $a/2$ с центром в $(a/2, 0)$. В полярных координатах на плоскости $x0y$ уравнение проекции $r = a\cos\varphi$. Площадь расположенного “над ней” участка цилиндрической поверхности равна интегралу $s = \int\limits_L z \, dl$, где z вычисляется из уравнения сферы, откуда $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, или $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ в соответствующей цилиндрической системе. По известной формуле, в полярной системе $dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$, что равно $a \, d\varphi$ для L. Переходя к φ в интеграле по L, получаем $s = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi} \, a \, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} a^2 \sin\varphi \, d\varphi = a^2$. Общая площадь равна $4a^2$.

0.2 – При непосредственном вычислении разбиваем данный интеграл на два и учитываем значение подынтегрального выражения на каждом из отрезков. $\int\limits_{BSA} ... = \int\limits_{BS} ... + \int\limits_{SA} ... = \int\limits_0^1 y^2 dy + \int\limits_{-1}^0 x^2\, dx$, что дает

$$\int\limits_{BSA} ... = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Для выполнения второй части задания надо взять замкнутый контур, частью которого является BSA. Уместно дополнить BSA участками осей до квадрата $BSAOB$. Тогда по формуле Грина $\int\limits_{BO} ... + \int\limits_{OA} ... + \int\limits_{ASB} .. =$ $\iint\limits_D (-x^2 - y^2) dx\, dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^0 (-x^2 - y^2) dx = \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{3} - y^2\right) dy = -\frac{2}{3}$. Так как на осях $\int\limits_{BO} .. = 0 = \int\limits_{OA} ..,\quad \int\limits_{ASB} = -\frac{2}{3}$, откуда $\int\limits_{BSA} = \frac{2}{3}$.

0.3 –Участок S представляет собой четвертую часть сферы, расположенную в четверти пространства, определяемой условиями $y, z > 0$. На плоскость yOz он дважды проецируется в четверть круга, которую в дальнейшем обозначим как D_{yz}. Внешние нормали для половины S при $(x > 0)$ образуют с Ox острые, а для $S(x < 0)$ - тупые углы. Поэтому $\iint\limits_S x^2\, dydz =$ $\int\limits_{S(x>0)}\int ... + \int\limits_{S(x<0)}\int ... = \int\limits_{D_{yz}}\int \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} dydz - \int\limits_{D_{yz}}\int \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} dydz = 0.$ Проекция S на $x0y$ - полукруг D_{xy}, а внешняя нормаль на всей поверхности имеет $\cos\gamma \geq 0$, и для нее $z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, поэтому $\iint\limits_S z\, dxdy =$ $\int\limits_{D_{yx}}\int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^a r \cdot r\, dr = \frac{\pi a^3}{3}$.

0.4 – Для начала преобразуем $f_n(x) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1 + x/n}\right) =$ $= \sin\left(2\pi n(1 + \frac{x}{2n} + o(\frac{1}{n})\right) = \sin(x\pi + o(1))$. И для любого $x \in R$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =$ $\sin \pi x = f(x)$.График $f(x)$ получается сжатием графика $y = \sin x$ в π раз к оси Oy; нули его - в целых числах; период $T = 2$ (рис. 2 , b) .

Рис. 2

0.5 – Фиксируем x и устремляем n к ∞, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+x^2}=1$, т.е. для всех рассматриваемых множеств предельная функция $f(x)=1$. Верхняя грань отличия между f и f_n $\quad \Delta_n=\sup\limits_{E_i}\left|\frac{n+1}{n+x^2}-1\right|=\sup\limits_{E_i}\left|\frac{1-x^2}{n+x^2}\right|$. На E_1 $\Delta_n=\frac{1}{n}$ и стремится к 0 с ростом n. Это означает,что сходимость на E_1 равномерная. На E_2 $\Delta_n=1$, поскольку при фиксированном n имеется возможность взять x сколь угодно большим по абсолютной величине. Дробь при этом становится сколь угодно близкой к 1 и не стремится к 0 с ростом n. Сходимость на E_2 неравномерная. E_3 состоит из конечного числа точек множества сходимости, что означает равномерную сходимость на E_3.

0.6 – Предполагая обратиться к признаку Дирихле (что достаточно часто делается для рядов со знакопеременными слагаемыми), заметим сразу, что последовательность $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ монотонна по n и сходится к 0 равномерно $(f_n\le\frac{1}{n})$. Частичные суммы, образованные вторыми множителями $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sin x\sin ix$ оцениваются с помощью тригонометрической формулы. $\sigma_n=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin ix\le 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\frac{\cos(n+1/2)x-\cos 1/2x}{2\sin\frac{x}{2}}\le 2$, что и доказывает равноменую сходимость на всей оси.

0.7 – В $x=0$ ряд сходится, в чем убеждаемся простой подстановкой. Для других x члены ряда знакоположительны; допускается применение признака Даламбера, по которому ряд сходится на всей оси. Все $u_n(x)$ непрерывны на R. Если бы удалось доказать равномерную сходимость ряда на всей оси, этого было бы достаточно для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Однако непосредственное исследование равномерности в данном случае требует некоторых усилий, и проще найти предельную функцию и исследовать ее. Частичные суммы $s_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}x^2e^{-ix^2}=$ $=x^2\left(e^{-x^2}+e^{-2x^2}+...+e^{-nx^2}\right)$ представляют собой суммы членов геометрической прогрессии с $q=e^{-x^2}$ и допускают вычисление их предела: $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=x^2\frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\frac{x^2}{e^{x^2}-1}$ (Проведенные выкладки законны при $q<1$, т.е. при $x\ne 0$.) Полученная функция непрерывна на всей оси, кроме $x=0$. Вычисляем $\lim\limits_{x\to 0}S(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x^2-1+o(x^2)}=1$. В то же время подстановка $x=0$ в $s_n(x)$ дает $s_n(0)=0=S(0)$, что и доказывает разрывность $S(x)$ в нуле. Кстати, этот факт говорит о том, что сходимость неравномерная, потому что при равномерной сходимости предельная функция должна быть непрерывной.

0.8 – Частичные суммы ряда состоят из последовательных членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = |x|$, следовательно, множество сходимости ряда: $|x| < 1$. При $|x| \geq 1$ ряд расходится. Члены ряда $u_n(x)$ с нечетными n не дифференцируемы в нуле и непрерывно дифференцируемы во всех остальных точках множества сходимости.
Любую точку множества сходимости можно считать внутренней точкой некоторого отрезка, на котором сходимость равномерная, что гарантирует существование производной у суммы ряда во всех точках, кроме, может быть, нуля. Для данного ряда сумма получается в явном виде $S(x) = \frac{1}{1-|x|}$. Она, действительно, недифференцируема в нуле.
0.9 – На рассматриваемом отрезке слагаемые ряда непрерывны, а сам ряд сходится на нем равномерно, убедиться в чем можно подобно тому, как это сделано в примере 0.6, поэтому возможно почленное интегрирование ряда.

$$\int\limits_{1/2}^{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n\sqrt{n}}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{1/2}^{2}\frac{\sin 2nx}{n\sqrt{n}}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n - \cos 4n}{2n^2\sqrt{n}}$$

0.10 – Данную функцию можно получить в результате двукратного дифференцирования функции $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad \varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\varphi''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, то есть $f(x) = \frac{1}{2}\varphi''(x)$. Поскольку $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ можно считать пределом суммы членов геометрической прогрессии с $q = x$, $b_0 = 1$, имеем: $\varphi(x) = 1+x+x^2+... = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \quad (R = 1), \qquad \varphi'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (R = 1)$.
Тогда $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)kx^k$.
0.11 – Подынтегральная функция и ее производная по y непрерывны на всей плоскости, пределы интегрирования непрерывно дифференцируемы, так что по общей формуле $F'(y) = \int\limits_{0}^{\sin y}((x+y)e^x)'\,ydx + (\sin y + y)e^{\sin y}\cos y - (0+y)e^0 = e^{\sin y} + (\sin y + y)e^{\sin y}\cos y - y$.
0.12 – Оба предела интегрирования - особые точки (других особых точек на интервале интегрирования нет). Разбиваем интеграл на два: $\int\limits_{0}^{\infty}... = \int\limits_{0}^{1}... + \int\limits_{1}^{\infty}...$. При $x \to 0 \quad \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$, а поскольку в нуле интеграл от $\frac{1}{x^p}$ для p<1 сходится, то и первый интеграл суммы сходится. При $x \to \infty$ $\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}} \sim \frac{1}{x}^2$, следовательно, и второй интеграл сходится. В целом, данный интеграл сходится.

0.13 – При любом p из E_1 и E_2 интеграл сходится, для $p > 0$ он вычисляется на основании определения как $p \lim\limits_{B\to\infty} \left(\frac{1}{p} \left(-e^{-px}\right)\Big|_0^B \right)$. При $p = 0$ он равен 0. На множестве E_1 $pe^{-px} < p_1 e^{-p_0 x}$, а так как интеграл от правой части неравенства сходится, то на E_1 сходимость данного интеграла равномерная.
В случае E_2 сходимость неравномерная, так как выполняется отрицание критерия Коши: какое бы B ни взять, найдутся такие $b_1, b_2 > B$, такое значение $p^* \in E_2$ и такое ε, что $\int\limits_0^\infty p^* e^{-p^* x} dx$ превышает ε. Действительно, для произвольного B возьмем $b_1 = B + 1$, $b_2 = 2b_1$, $p^* = \frac{1}{b_1}$. Это можно сделать на множествах $[0,p_1]$ и $(0, p_1]$. Тогда $\int\limits_{b_1}^{b_2} pe^{-px} dx = \frac{1}{e^{Bp}} - \frac{1}{e^{2Bp}} = \frac{e^2 - e}{e^3}$, что заведомо больше 0.01, т.е. выбором B не может быть сделано сколь угодно малым.
0.14 – Для вычисления коэффициентов Фурье используем общие формулы с $l = 1$ и учитываем, что на правой половине интервала интегрирования $f(x) \equiv 0$.
$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{0} (-x) dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$
$a_k = \int\limits_{-1}^{0} (-x) \cos k\pi x\, dx = \int\limits_{0}^{-1} x \cos k\pi x\, dx = \frac{1}{k\pi} \int\limits_{0}^{-1} x d(\sin k\pi x) =$
$= \frac{1}{k\pi} \left(x \sin k\pi x \Big|_0^{-1} - \int\limits_0^{-1} \sin k\pi x\, dx = \frac{1}{k^2\pi^2} (\cos k\pi - 1) \right) = \frac{1}{k^2\pi^2} \left((-1)^k - 1 \right)$ Для четных k $\quad a_k = 0$, а при $k = 2m + 1$ $\quad a_k = -\frac{2}{(2m+2)^2\pi^2}$.
Аналогично $b_k = \int\limits_{-1}^{0} (-x) \sin k\pi x\, dx = \frac{1}{k\pi} \int\limits_{-1}^{0} x\, d(\cos k\pi x) =$
$\frac{1}{k\pi} \left(x \cos k\pi x|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0} \cos k\pi x\, dx \right) = \frac{1}{k\pi} \cos k\pi = \frac{(-1)^k}{k\pi}$
Результат разложения запишем в виде суммы двух тригонометрических рядов

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m + 1)\pi x}{(2m + 1)^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k\pi x}{k}$$

График суммы приведен на рис.2 а) .
0.15 – Разложение по косинусам соответствует четному продолжению на $(-\pi, 0)$. Коэффициенты отыскиваются по стандартным формулам.

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+\cos x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi + \sin x|_0^\pi\right) = \pi$

$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+\cos x)\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^\pi \frac{x}{k} d(\sin kx) + \int\limits_0^\pi \cos x \cos kx\, dx\right) = I_1 + I_2$

$I_1 = \frac{2}{\pi k}\left(x\sin kx|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin kx\, dx\right) = \frac{2}{\pi k^2}\cos kx|_0^\pi = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)$ При k четном $I_1 = 0$, при нечетном $I_1 = -\frac{4}{\pi k^2} \quad (k = 2m+1)$.

I_2 (при $k=1$) $= \int\limits_0^\pi \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$ $\qquad I_2$ (при $k \neq 1$) $= \int\limits_0^\pi \cos x \cos kx\, dx = 0.$

$$b_k = 0 \quad \text{Окончательно: } f(x) = \frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{4}{\pi}\right)\cos x - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$$

При нечетном продолжении $a_k = a_0 = 0$.

$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+\cos x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\int\limits_0^\pi \frac{x}{k} d(\cos kx) + \int\limits_0^\pi \cos x \sin kx dx\right) = J_1 + J_2$

$J_1 = \frac{2}{\pi k}\left(-x\cos kx|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos kx\, dx\right) = -\frac{2(-1)^k}{k}$ $\qquad J_2$(при k=1)$=$
$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin 2x\, dx = 0$ $\;J_2$(при $k \neq 1$) $= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin kx \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\sin(k-1)x + \sin(k+1)x)\, dx = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(k-1)x}{k-1} + \frac{\cos(k+1)x}{k+1}\right)\Big|_0^\pi =$ [после приведения к общему знаменателю, замены сумм произведениями и подстановки пределов интегрирования] $= \frac{2k((-1)^{k+1}-1)}{\pi(k^2-1)}$. Для нечетных k $\; b_k = 0$, для $k = 2m \quad b_k = -\frac{8m}{\pi(4m^2-1)}$.

$$f(x) = 2\sin x + \sum_{k=2}^{\infty}\sin kx\left(\frac{2(-1)^{k+1}}{k} + \frac{2k((-1)^k+1)}{\pi(k^2-1)}\right) =$$

$$= 2\sin x + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k} - \frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\sin 2mx}{(4m^2-1)}$$

В разложении по косинусам (четное продолжение) коэффициенты убывают как $\sim \frac{1}{k^2}$, а по синусам – как $\sim \frac{1}{k}$, что объясняется большей гладкостью четного продолжения (см. рис. 3).

Рис. 3

1 вариант

1.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=a^2$, заключенной между плоскостью $z=0$ и параболическим цилиндром $z=a^2+\dfrac{x^2}{a^2}$.

1.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile AB} x^2y dx - xy^2 dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 4)непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – четверть окружности единичного радиуса, расположенная в 1-ом квадранте).

Рис. 4

1.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x\, dydz + y^2\, dzdx + z^3\, dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a$.

1.4. Для функциональной последоватеьности $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^n}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

1.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ на каждом из множеств: $E_1 = (0, \infty), \quad E_2 = \{0\} \cup [1, 2]$.

1.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x \sin nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$ на множестве E$=(-\infty, \infty)$.

1.7. Найти область существования функции $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ и исследовать ее на непрерывность.

1.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

1.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2nx}{n\sqrt{n}}$ допускает почленное интегрирование на $[1/2, 2]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

1.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

1.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^{y^2} \frac{\sin x^2 y}{x^2} dx$.

1.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 12x}}$.

1.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\sin x}{x^y} dx$ на множествах $a) E_1 = (0, y_0),\ 0 < y_0 < 2, \quad b) E_2 = (0, 2)$.

1.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-1, 1)$, равном периоду, формулой $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{при} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$. Начертить график суммы ряда.

1.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x^2 - \pi x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

2 вариант

2.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и параболическим цилиндром $z = \dfrac{y^2}{a}$.

2.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{BSA} x^2 y dx - x y^2 dy$ по незамкнутой линии BSA (рис. 4)непосредственно и с использованием формулы Грина (BSA – смежные стороны квадрата)

2.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z^2\, dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x \ge 0$.

2.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + nx^2}\right)$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

2.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x+1}$ на каждом из множеств: $E_1 = [0,1], \quad E_2 = 1, \infty)$.

2.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$ на множестве E=$(0, \infty)$.

2.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ и исследовать ее на непрерывность.

2.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

2.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{4^n}$ допускает почленное интегрирование на $[0, 2]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

2.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \sin t^2 dt$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

2.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_y^0 \sqrt{xy} \cos xy \, dx$.

2.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x - \sin x}$.

2.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-ax)}} dx$ на множествах $a) E_1 = (0, a_0), \ a_0 < 1, \quad b) E_2 = (0, 1)$.

2.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, равном периоду, формулой
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\pi/2 < x \geq 0 \\ \sin x & \text{при} \quad 0 \leq x < \pi/2 \end{cases}$. Начертить график суммы ряда.

2.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x + \sin x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

3 вариант

3.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2 = a^2$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и параболическим цилиндром $z = \dfrac{x^2}{a}$.

3.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile{AB}} x^2y dx - xy^2 dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 4)непосредственно и с использованием формулы Грина (AB –дуга эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$)

3.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2\, dydz + y^3\, dzdx + z\, dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad 0 \le z \le c$.

3.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = \dfrac{x^n+1}{2+x^n}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

3.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$ на каждом из множеств: $E_1 = [-2\pi, 2\pi], \quad E_2 = (-\infty, \infty)$.

3.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cos nx}{\sqrt{n+x}}$ на множестве E=$(0, \infty)$

3.7. Найти область существования функции $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+1}$ и исследовать ее на непрерывность.

3.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

3.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{2^n}$ допускает почленное интегрирование на $[1, 2]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

3.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

3.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^{1/y^2} \frac{\ln(1+xy^2)}{1+y^2} dx$.

3.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}}\, dx$

3.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \sqrt{p} e^{-px^2} dx$ на множествах $a) E_1 = (0, \infty), \quad b) E_2 = (1, \infty)$.

3.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -l < x < 0 \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le x < l \end{cases}$, заданную на интервале $(-l, l)$, равном периоду. Начертить график функции.

3.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

4 вариант

4.1. Найти массу четверти окружности $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$, расположенной в первом квадранте $(x \ge 0, y \ge 0)$, если линейная плотность в каждой точке равна ординате точки.

4.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile{AB}} x^2y dx - xy^2 dy$ по незамкнутой линии AB (рис. 5)непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – сторона треугольника ABO)

4.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z^2\, dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \ge 0$.

Рис. 5

4.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = \cos\left(2\pi\sqrt{n^2 + nx^2 + x^4}\right)$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

4.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$ на каждом из множеств: $E_1 = [0, \pi]$, $E_2 = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$.

4.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \cos nx}{\sqrt{n^2 + x^2}}$ на множестве E=$(-\infty, \infty)$.

4.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2 x}{n^2 + x^2}$ и исследовать ее на непрерывность.

4.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n^2 x}{n^4 + 1}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

4.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n + 1}{n^3}$ допускает почленное интегрирование на $[-1, 1]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

4.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \arcsin x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

4.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_{y}^{\sin y} \cos\sqrt{xy}\, dx$.

4.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{e^{-x} - 1}{x\sqrt{x}} dx$

4.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{1 + x^2 + a^2}$ на множествах $a) E_1 = [-1, 1]$, $b) E_2 = (-\infty, \infty)$.

4.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\pi < x < 0 \\ \sin x & \text{при} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$, заданную на интервале $(-\pi, \pi)$, равном периоду. Начертить график функции.

4.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x \cdot \cos x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

5 вариант

5.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2 = R^2$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и гиперболическим параболоидом $z = \dfrac{xy}{2R}$ для $x > 0, \quad y > 0$.

5.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile{AB}} x^2y dx - xy^2 dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 5) непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – полуокружность радиуса R, $x \leq 0$).

5.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} dydz + y\, dzdx + z^2\, dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a$.

5.4. Для функциональной последоватеьности $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1+x^n}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

5.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности
$f_n(x) = \dfrac{n+x}{nx+1}$ на каждом из множеств: $E_1 = [0, 1], \quad E_2 = 1, 100]$.

5.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \cos nx}{\sqrt[3]{n^3+x^3}}$ на множестве E=$(0, \infty)$.

5.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n(\sqrt{n}+1)}$ и исследовать ее на непрерывность.

5.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-n^2 x}}{n^2}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

5.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n\sqrt{n}}$ допускает почленное интегрирование на $[-1, 1]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

5.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \sin t^2 dt$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

5.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_{y^2}^{y} (x - y)e^x dx$.

5.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x}|1 - x|}$

5.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^1 x^{a-1} \ln^2 x\, dx$ на множествах $a) E_1 = (a_0, \infty)\ a_0 > 0, \quad b) E_2 = (0, \infty)$.

5.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при} \quad -1 < x < 0 \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$, заданную на интервале $(-1, 1)$, равном периоду. Начертить график суммы ряда.

5.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x + \pi$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

6 вариант

6.1. Найти массу участка кривой линии $y = 2\sqrt{x}$ между точками $A(1, 1)$ и $B(4, 2)$, если линейная плотность в каждой точке равна $\alpha\sqrt{x}$.

6.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\breve{ACB}} (x + y)dx - y\, dy$ по незамкнутой дуге ACB (рис. 5)непосредственно и с использованием формулы Грина (ACB – стороны треугольника).

6.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^3\,dydz + y\,dzdx + z^2\,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$.

6.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = = \sin\left(2\pi\sqrt{n^4 + x^2(n^2+1)}\right)$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

6.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2nx^2}\right)$ на каждом из множеств: $E_1 = (0, \frac{\pi}{2}), \quad E_2 = (\frac{\pi}{2}, \infty)$.

6.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos x \sin nx}{\sqrt[3]{n^3 + x^3}}$ на множестве E$=(0,\infty)$.

6.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4 + x^4}$ и исследовать ее на непрерывность.

6.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-a)^n}{n^2+1}, \quad a > 0$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

6.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2+1}$ допускает почленное интегрирование на $[\pi/2, \pi]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

6.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

6.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} e^{-x^2 y} dx$.

6.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{\dfrac{x}{1+x^3}}\, dx$.

6.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} x^y e^{-x} dx$ на множествах $a) E_1 = (0, \infty), \quad b) E_2 = (-1, \infty)$.

6.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при} \quad -\pi/2 < x < 0 \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le x < \pi/2 \end{cases}$, заданную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, равном периоду. Начертить график суммы ряда.

6.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = 1 + \sin x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

7 вариант

7.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2 = a^2$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и параболическим цилиндром $z = \dfrac{x^2}{a^2}$.

7.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile{AB}} (x^2 + 1)ydx - xy^2dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 4)непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – четверть окружности единичного радиуса, расположенная в 1-ом квадранте).

7.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} y^2\, dzdx + z^2\, dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности части сферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $y \le 0$, $z \ge 0$.

7.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+x^n}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

7.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности
$f_n(x) = \sin\left(ne^{-nx}\right)$ на каждом из множеств: $E_1 = [0, \infty)$, $\quad E_2 = (1, \infty)$.

7.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^2}{\sqrt{n^2 + x}}$ на множестве E=$[-1, 1]$.

7.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-xn}$ и исследовать ее на непрерывность.

7.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n!}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

7.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n}$ допускает почленное интегрирование на $[-1, 2]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

7.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

7.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_{y}^{1} e^{x^2+y^2} dx$.

7.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$.

7.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x \sin yx}{1+x^2} dx$ на множествах $a) E_1 = (y_0, 1)\ 0 < y_0 < 1, \quad b) E_2 = (y_0, \infty)$.

7.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при} \quad -\pi/2 < x < 0 \\ -\sin x & \text{при} \quad 0 \le x < \pi/2 \end{cases}$, заданную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, равном периоду. Начертить график суммы ряда.

7.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = \pi - x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

8 вариант

8.1. Найти массу полуокружности $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$, расположенной в верхней полуплоскости $(y \ge 0)$, если линейная плотность в каждой точке равна ординате точки.

8.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{BSA} (2x+y)dx - 2y\,dy$ по незамкнутой линии BSA (рис. 4)непосредственно и с использованием формулы Грина (BSA – смежные стороны квадрата).

8.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2\,dydz + y^2\,dzdx$, где S – внешняя сторона поверхности части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \le 0$, $x \le 0$.

8.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = \sqrt[n]{x^{2n}+x^n+1}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

8.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = x - x^n$ на каждом из множеств: $E_1 = [0,1]$, $E_2 = [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}]$.

8.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ на множестве E$=[0,1]$.

8.7. Найти область существования функции $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-xn}$ и исследовать ее на непрерывность.

8.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

8.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^x}{n!}$ допускает почленное интегрирование на $[-1,2]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

8.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

8.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^{\sqrt{y}} \sqrt{x^2+y^2}\sin xy\,dx$.

8.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3-9x^2+20x}}$

8.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\sin x}{1+x^y}dx$ на множествах $a)E_1 = (0,\infty)$, $b)E_2 = (1,\infty)$.

8.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-2,2)$, равном периоду, формулой $f(x) = 2x - x^2$. Начертить график суммы ряда.

8.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0,\pi]$ формулой $f(x) = x - \sin x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

9 вариант

9.1. Найти массу участка линии $x = e^t\cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t$, определяемого условием $t \in [0,1]$, если линейная плотность в точке равна квадрату расстояния от точки до начала координат.

9.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\breve{AB}} (x+2y)dx - y\,dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 4)непосредственно и с использованием формулы Грина (AB –дуга эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$).

9.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

9.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = \sqrt[4]{x^4 + \dfrac{2x^2}{n^2}}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

9.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \sqrt{x^4 + \dfrac{x^2}{n^4}}$ на каждом из множеств: $E_1 = (-\infty,\infty), \quad E_2 = [-1,1]$.

9.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x \cos nx}{\sqrt[4]{n^5+x^5}}$ на множестве E$=(0,\infty)$.

9.7. Найти область существования функции $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{\sqrt{n}}$ и исследовать ее на непрерывность.

9.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sinnx}{n!}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

9.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ допускает почленное интегрирование на $[0, \pi/2]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

9.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \arcsin 2x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

9.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$.

9.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} dx$.

9.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^2}{1+(x-y)^6} dx$ на множествах $a) E_1 = (-\infty, y_0]\ y_0 > 0, \quad b) E_2 = [0, \infty)$.

9.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-2, 2)$, равном периоду, формулой $f(x) = x^2 - 2x$. Начертить график суммы ряда.

9.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x^2$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

10 вариант

10.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и гиперболическим параболоидом $z = \dfrac{a}{2} xy, \quad x, y > 0$.

10.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile{AB}} (x+y)dx - y\,dy$ по незамкнутой линии AB (рис. 5)непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – сторона треугольника ABO).

10.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dzdx + z^2\,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a$.

10.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = x^2\left(1 + e^{-nx}\right)$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

10.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ на каждом из множеств: $E_1 = [0, e], \quad E_2 = (0, \infty)$.

10.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)\cos^4 nx}{n\sqrt[3]{n+x^2}}$ на множестве E$=(-4, 2)$.

10.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^n$ и исследовать ее на непрерывность.

10.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n^2 + 2n}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

10.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(1+\sqrt{n})}$ допускает почленное интегрирование на $[-1, 1]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

10.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

10.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^y \sin x^2(y - x)\, dx$.

10.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x}\, dx$.

10.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\sin px}{\sqrt{x}} dx$ на множествах $a) E_1 = (p_0, \infty)\ p_0 > 0, \quad b) E_2 = (0, \infty)$.

10.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-\pi, \pi)$, равном периоду, формулой $f(x) = \sin \frac{x}{2}$. Начертить график суммы ряда.

10.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x - \pi$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

11 вариант

11.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью $z = 2 - \sqrt{x}, \quad (x \in [1, 4])$.

11.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\breve{AB}} (x^2+1)y\,dx - y^2 x\,dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 5) непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – полуокружность радиуса R, $x \leq 0$).

11.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} dydz + y^2\,dzdx + z\,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c$.

11.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = x - x^(2n)$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

11.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$ на каждом из множеств: $E_1 = [0, 1], \quad E_2 = [1, \infty)$.

11.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^x}{n!}$ на множестве E=$(-10, 10]$.

11.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ и исследовать ее на непрерывность.

11.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2+1}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

11.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ допускает почленное интегрирование на $[-1, 1]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

11.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

11.11. Для функциональной последовательности $f_n(x) = ne^{-nx}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

11.12. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^{y^2} (e^x + y)x\, dx$.

11.13. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \sqrt{x}\, \dfrac{x+1}{x+2} dx$.

11.14. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^1 x^d x$ на множествах $a) E_1 = [0,01;\ 1], \quad b) E_2 = [0,01;\ 100]$.

11.15. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-\pi, \pi)$, равном периоду, формулой $f(x) = \cos \frac{x}{2}$. Начертить график суммы ряда.

11.16. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = x \cdot \sin x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

12 вариант

12.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и параболическим цилиндром $z = a + \dfrac{x^2}{a}$.

12.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{A\overset{\smile}{C}B} (x+2y)dx - y\,dy$ по незамкнутой дуге ACB (рис. 5) непосредственно и с использованием формулы Грина (ACB – стороны треугольника).

12.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^3\,dydz + y^2\,dzdx + z\,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $-a \le x \le a, \quad -a \le y \le a, \quad -a \le z \le a$,

12.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = nxe^{-nx}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

12.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \dfrac{nx\sin(x/n)}{1+n^2x^2}$ на каждом из множеств: $E_1 = [0,1], \quad E_2 = [-1,1]$.

12.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin nx}{3^n}$ на множестве $(-\infty, \infty)$.

12.7. Найти область существования функции $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{n^2 + x^2}$ и исследовать ее на непрерывность.

12.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n^2 - 2n + 1}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

12.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^x}{n!}$ допускает почленное интегрирование на $[-1,1]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

12.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

12.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_{1+y}^{2+y} \frac{\sin xy}{x} dx$.

12.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$.

12.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-px}dx$ на множествах $a) E_1 = (0, \infty)$, $\quad b) E_2 = (p_0, \infty)\; p_0 > 0$.

12.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-2, 2)$, равном периоду, формулой
$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -2 < x < 0 \\ x/2 & \text{при} \quad 0 \leq x < 2 \end{cases}$ Начертить график суммы ряда.

12.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = \pi^2 - x^2$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

13 вариант

13.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью $z = 8 - x\sqrt{x}$, $\quad (x \in [1, 4])$.

13.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile{AB}} x^2y\,dx - x(y^2+1)\,dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 4)непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – четверть окружности единичного радиуса, расположенная в 1-ом квадранте).

13.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2\,dydz + y\,dzdx + \,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $-a \leq x \leq a$, $\quad -a \leq y \leq a$, $\quad -a \leq z \leq a$,

13.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = ne^{-nx^2}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

13.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = x^n$ на каждом из множеств: $E_1 = [0, 1]$, $\quad E_2 = \{0; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1\}$.

13.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos nx}{2^n}$ на множестве E$=(-\infty, \infty)$.

13.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n + x^2}$ и исследовать ее на непрерывность.

13.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

13.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\sqrt{n}}$ допускает почленное интегрирование на $[-1, 1]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

13.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

13.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_1^{y^2} (x + 2y)^7 dx$.

13.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{|x-2|}}$

13.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$ на множествах $a) E_1 = (0, \infty)$, $\quad b) E_2 = (1, \infty)$.

13.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-l, l)$, равном периоду, формулой $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -l < x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \le x < l \end{cases}$
Начертить график суммы ряда.

13.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = \sin x - x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

14 вариант

14.1. Вычислить массу дуги $y = \ln x$ между точками с абсциссами $x = \sqrt{8}$ и $x = \sqrt{15}$, если линейная плотность в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

14.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{BSA} (x+y)dx - y\,dy$ по незамкнутой линии BSA (рис. 4)непосредственно и с использованием формулы Грина (BSA – смежные стороны квадрата).

14.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $y \geq 0$, $x \geq 0$,

14.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

14.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = x^{2n}(x^2-1)$ на каждом из множеств: $E_1 = (-1, 1)$, $\quad E_2 = \{-1; 0; \frac{1}{2}; 1\}$.

14.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n+x}$ на множестве E=$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

14.7. Найти область существования функции $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(\sqrt{n}+1)}$ и исследовать ее на непрерывность.

14.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

14.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n}$ допускает почленное интегрирование на $[2, 10]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

14.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = (x+2)\ln(x+2) - x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

14.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^y (x+y)\sin\sqrt{x+y}dx$.

14.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x}\ln x}$

14.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-px}\sin x\,dx$ на множествах $a) E_1 = (p_0, \infty)\; p_0 > 0, \quad b) E_2 = (0, \infty)$.

14.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, равном периоду, формулой
$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}x & \text{при} \quad -\pi/2 < x < 0 \\ \sin x & \text{при} \quad 0 \le x < \pi/2 \end{cases}$ Начертить график суммы ряда.

14.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = \pi + x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

15 вариант

15.1. Найти массу участка линии $x = e^t\cos t, \quad y = e^t\sin t, \quad z = e^t$, определяемого условием $t \in [0, 1]$, если линейная плотность в точке равна расстоянию от точки до начала координат.

15.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\breve{AB}} (2x+y)dx - 2y\,dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 4) непосредственно и с использованием формулы Грина (AB –дуга эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$).

15.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^4\,dydz + y^2\,dzdx + dxdy$, где S – внешняя сторона полной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

15.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = \sin\pi\sqrt{4n^2 + nx^2}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

15.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности
$f_n(x) = \dfrac{n^2 + nx + x^2}{n^2 + x^2}$ на каждом из множеств: $E_1 = [0, 1], \quad E_2 = (0, \infty)$.

15.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2 e^{-nx^2}}{n^2 + x^4}$ на множестве E$=(-\infty, \infty)$.

15.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ и исследовать ее на непрерывность.

15.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^3+1}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

15.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n}2^n}$ допускает почленное интегрирование на $[1/2, 2]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

15.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \arcsin 3x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

15.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_{y}^{y^2} \frac{\ln(1+2xy)}{x} dx$.

15.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{x^2}\, dx$.

15.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{\sin ax}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$ на множествах $a) E_1 = (0, \infty), \quad b) E_2 = (a_0, \infty)\ a_0.0$.

15.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, равном периоду, формулой
$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при} \quad -\pi/2 < x < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi}x & \text{при} \quad 0 \le x < \pi/2 \end{cases}$ Начертить график суммы ряда.

15.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой
$1 - \cos x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

16 вариант

16.1. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, заключенной между плоскостью $z = 0$ и поверхностью $2az = x^2y^2$ для $x > 0, \quad y > 0$.

16.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile{AB}} (2x+y)dx-2y\,dy$ по незамкнутой линии AB (рис. 5) непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – сторона треугольника ABO).

16.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2\,dydz+\,dzdx+z\,dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a$,

16.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = \cos\pi\sqrt{4n^2+nx^2}$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

16.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = n^2(1-x)x^{n-1}$ на каждом из множеств: $E_1 = [0,1], \quad E_2 = [0,01; 0,99]$.

16.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n+x^2}$ на множестве E$=(-\infty,\infty)$.

16.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ и исследовать ее на непрерывность.

16.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2nx}{n^3+1}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

16.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n!}$ допускает почленное интегрирование на $[1/2, 2\pi]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

16.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = x\cdot\cos^2 x$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

16.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^y (x^2+\sin x)(y-x)\,dx$.

16.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$

16.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x^2}dx$ на множествах $a)E_1 = (a_0, \infty)\ a_0 > 0, \quad b)E_2 = (0, \infty)$.

16.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $(-l, l)$, равном периоду, формулой
$f(x) = \begin{cases} x + l & \text{при} \quad -l < x < 0 \\ l - x & \text{при} \quad 0 \leq x < l \end{cases}$ Начертить график суммы ряда.

16.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = \sin x + x$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.

17 вариант

17.1. Вычислить массу дуги $y = \ln x$ между точками с абсциссами $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$, если линейная плотность в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

17.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\smile{AB}} x^2y\,dx - x(y^2+1)dy$ по незамкнутой дуге AB (рис. 5) непосредственно и с использованием формулы Грина (AB – полуокружность радиуса R, $x \leq 0$).

17.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} x\,dydz + y^2\,dzdx + dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2$,

17.4. Для функциональной последовательности $f_n(x) = x^2 \operatorname{arctg} nx^2$ определить множество сходимости, найти предельную функцию и начертить ее график.

17.5. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ на каждом из множеств: $E_1 = [-e, e], \quad E_2 = (-\infty, \infty)$.

17.6. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\pi^n}$ на множестве E$=[-3, 3]$.

17.7. Найти область существования функции $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (3^x - 1)^n$ и исследовать ее на непрерывность.

17.8. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n^3 x}{n^5 + 5}$ и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.

17.9. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n^2 + n}$ допускает почленное интегрирование на $[-1, 1]$ и найти получаемый при этом числовой ряд.

17.10. Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ в степенной ряд с центром в $x_0 = 0$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

17.11. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_0^y e^{-(x^2+y^2)} dx$.

17.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 10x}}$.

17.13. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} e^{-|x-p|}\, dx$ на множествах $a) E_1 = (-\infty, p_0),\ p_0 > 0 \quad b) E_2 = (0, \infty)$.

17.14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на периоде $(-1, 1)$ формулой $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при} \quad -1 < x < 0 \\ 1 - x & \text{при} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$ Начертить график суммы ряда.

17.15. Разложите в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$ формулой $f(x) = \pi x - x^2$. Начертите график суммы ряда для каждого разложения. Обратите внимание на порядок убывания коэффициентов Фурье обоих рядов: объясните отличие в порядках, если оно имеется.